Osnovni principi prebrojavanja

Oznake:

$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ je skup koji sadrži n najmanjih prirodnih brojeva.
$|X|$ je oznaka za broj elemenata skupa X.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ se čita ”en faktorijel”.
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, prevod sa engleskog za ovaj broj je ”od n biram k”.

1 Osnovni principi

1.1 Zadaci za zagrijavanje

1. Koliko ima svih n-tocifrenih prirodnih brojeva?

2. Koliko ima n-tocifrenih brojeva koji su djeljivi sa 5? Koliko ima trocifrenih brojeva djeljivih sa 5 kojima su sve cifre različite?

3. Koliko ima n-tocifrenih prirodnih brojeva u čijem se zapisu koristi bar jednom cifra 1?

4. Na teniskom turniru učestvuje n tenisera. Ko izgubi ispada. Koliko je mečeva potrebno odigrati da se dobije pobjednik?

1.2 Princip sume i princip proizvoda

Zadatak: Gradovi A, B, C i D su tjemena kvadrata. Od A do B postoje tri različita puta, od B do C četiri, od C do D dva; a od D do A postoji pet puteva. Svi putevi su dužine 1. Na koliko načina se može doči od mjesta A do C putem dužine 2?
Zadatak: Koliko ima binarnih nizova[1] dužine n? Koliko ima riječi dužine n u alfabetu od m slova? Riječ je svaki niz slova dužine n.
Zadatak: Koliko ima n-tocifrenih prirodnih brojeva u čijem se zapisu koristi bar jedna neparna cifra?
Zadatak: Koliko ima djelitelja broja 2400?
Zadatak: Koliko različitih rješenja ima nejednačina $|x| + |y| \leqslant 2022$ u skupu cijelih brojeva?

[1] binarni niz je niz nula i jedinica

1.3 Princip bijekcije

Zadatak: Koliko ima svih podskupova n-članog skupa?
Zadatak: Koliko ima binarnih nizova dužine n u kojima je broj jedinica neparan?
Zadatak: Dokaži: Ako prirodan broj n ima neparan broj djelitelja, onda je on potpun kvadrat!
Zadatak: Bacaju se tri različite kockice za jamb. Koliko ima ishoda kod kojih je zbir brojeva na svim kockicama veći od 10?

1.4 Dvostruko prebrojavanje

Zadatak: Koliko ima dijagonala u konveksnom n-touglu?
Zadatak: Neka je p dat prirodan broj. Svaki student na fakultetu sluša najviše $p+1$ predmeta, a svaki predmet sluša najviše p studenata. Pri tome, svaki par studenata sluša bar jedan isti predmet. Koliko najviše studenata može da bude na fakultetu?

2 Tri važna broja

2.1 Permutacije, varijacije ili rasporedi

Permutacija konačnog skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se može definisati kao

- uređena n-torka $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ u kojoj se svaki od n elemenata iz skupa X pojavi tačno jednom;
- bijekcija na skupu X, to jest funkcija $f : X \to X$ koja je $1-1$ i NA;
- linearno uređenje $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_n}$ na skupu X (raspored n predmeta na n mjesta).

Lako se uvjeriti da su ove tri "različite definicije" permutacije konačnog skupa ustvari jedna te ista definicija.

Zaista, ako bijekciju $f : X \to X$ predstavimo u obliku tabele

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_i)$	$\cdots$	$f(x_n)$

tada se u drugoj vrsti tabele pojave svi elementi iz X, i svaki element se pojavi tačno jednom. Zato je $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ uređena n-torka u kojoj su svi elementi iz X, odnosno linearno uređenje na X.

Važno: Broj svih permutacija n-članog skupa je $n!$.

Zadatak: Koliko se najviše nenapadajućih topova može postaviti na šahovsku tablu? Na koliko načina možemo postaviti te topove?
Zadatak: Na koliko različitih načina n ljudi može da sjedne oko okruglugog stola? Dva rasporeda sjedenja su ista ako svaka osoba ima iste susjede (i lijevo i desno).

Zadatak: Koliko ima injekcija[2] $f : [k] \to [n]$?
Zadatak: Koliko ima permutacija skupa $[n]$ u kojima:

1. se broj 1 pojavi prije 2
2. brojevi 1 i 2 su jedan do drugog
3. između bilo koja dva neparna broja nema parnih

2.2 Nizovi ili riječi

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ konačan skup od m slova (simbola). Riječ u alfabetu A dužine n je uređena n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ili niz dužine n), gdje su svi x_i elementi skupa A. Broj riječi dužine n u alfabetu A je $|A|^n$.
Zadatak: Koliko ima svih funkcija $f : [n] \to [m]$?
Zadatak: Koliko ima funkcija $f : [n] \to [n]$ kod kojih je $f(i) = i$ za bar jedan $i \in [n]$?

2.3 Kombinacije ili podskupovi

Često je dio rješenja zadatka iz kombinatorike odgovor na pitanje:
Na koliko načina iz nekog skupa od n elemenata možemo odabrati podskup od tačno k elemenata?
Za razliku od permutacija, sada nije važan raspored odabranih elemenata, nego samo koje smo elemente odabrali.

TEOREMA 1 (broj k-članih podskupova). *Broj svih k-članih podskupova skupa od n elemenata je*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Skica dokaza:
Broj svih k permutacija nčlanog skupa X je $\frac{n!}{(n-k)!}$. Svaki k-člani podskup od X ima $k!$ permutacija (koje su k-permutacije od X). Permutacijama različitih podskupova odgovaraju različite k permutacije od X, pa je broj svih k-članih podskupova

$$\frac{n!}{(n-k)!} : k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Zadatak: Dokaži sljedeća tvrđenja

(i) Za sve prirodne brojeve $n \geq k \geq 0$ je $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(ii) Za proizvoljan prirodan broj n vrijedi $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

(iii) Za sve prirodne brojeve $n \geq k \geq 1$ je $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ **(Paskalov identitet)**.

(iv) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$.

[2] Injekcija $f : [k] \to T$ se naziva i k-permutacija skupa T. Za razliku od permutacije, ne rasporedjujemo sve elemente T nego samo njih k. Ovo se u školi još zove i varijacija

Zadatak: U konveksnom n-touglu su povučene sve dijagonale. Ako nikoje tri dijagonale ne prolaze kroz istu tačku, koliko ima presječnih tačaka tih dijagonala koje su unutar n-tougla?
Zadatak: Pravougaonik $m \times n$ je pravim podijeljen na jedinične kvadrate. Koliko se pravougaonika vidi na toj slici?
Zadatak: Koliko ima najkraćih puteva (iz tačke (p, q) se može doći u $(p+1, q)$ ili u $(p, q+1)$) u cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do (m, n)?

3 Domaći rad

1. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji u decimalnom zapisu imaju bar dvije različite cifre?

2. Lopta je sašivena od 32 poligona koji su ili petouglovi ili šestouglovi. Svaki petougao je susjedan samo sa šestouglovima, a svaki šestougao je susjedan sa tri petougla i sa tri šestougla. Koliko je petouglova na lopti?

3. Na koliko načina možemo postaviti kralja na šahovsku tablu, a zatim odigrati potez?

4. Koliko ima 2011-tocifrenih prirodnih brojeva djeljivih sa 99 kojima je jedna cifra 2, dvije cifre su 3, a ostale su 1?

5. Ana je na kružnici nacrtala n tačaka i označila ih je sa brojevima od 1 do n. Povukla je sve duži kojima su krajevi tačke $1, 2, \dots, n-1$, a tačku n je spojila sa nekoliko preostalih. Ako znamo da je Ana ukupno nacrtala 60 duži, sa koliko je tačaka spojila tačku n?

6. U hodniku je 2018 prekidača za 2018 sijalica koje su na početku ugašene. Prekidači su označeni redom brojevima od 1 do 2018. Svaki od 2018 učenika prođe hodnikom. Pri tome i-ti učenik pritisne svaki prekidač označen brojem koji je djeljiv sa i. Koliko je sijalica ostalo upaljeno kada su svi učenici prošli hodnikom?

7. Koliko ima binarnih nizova dužine n koji imaju više jedinica nego nula?

8. Žaba sjedi u tački $(0, 0)$. Svake sekunde žaba skoči u jednu od susjedne četiri cjelobrojne tačke. Koliko ima tačaka u kojima žaba može da sjedi nakon 1001 sekundi?

9. Sva polja šahovske table 8×8 je proizvoljno obojena sa dvije boje (crno-bijelo). Ana želi da postavi žeton u prvi red na bijelo polje, i da ga pomjerajući na susjedna bijela polja (susjedna polja dijele zajedničku ivicu) dovede do posljednjeg (osmog) reda. Da li ima više bojenja table za koja Ana može da ostvari cilj ili bojenja za koja nije moguće ostvariti ono što Ana želi?

10. Na koliko načina možemo postaviti damu na "šahovsku tablu" $n \times n$, a zatim odigrati potez?

4 Teži, teški i baš teški zadaci

1. Koliko ima načina da se $m \times n$ tabela popuni brojevima -1 ili 1 tako da proizvod elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni bude 1.

2. Dvadeset koverata u obliku kvadrata različitih veličina treba spakovati u najveću od njih. Pri tome, svaka manja koverta se može ubaciti u neku veću, a sve moraju biti u najvećoj. Na koliko načina je to moguće uraditi?

3. Zadat je pravilan n-tougao $A_1A_2\ldots A_n$. Koliko ima tupouglih trouglova kojima su tjemena iz skupa $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$?

4. Mali poštar Pero živi u ulici u kojoj je n kuća, sve kuće su sa iste strane ulice i udaljenost između dvije susjedne kuće je 100 metara. Pero kreće od svoje kuće, treba da podijeli pozivnice za rođendan svima u ulici i da se vrati u svoju kuću. Kako želi da smrša htio bi da hoda što duže. Koliki put Pero najviše može da pređe?

5. Ako je $p_n(k)$ broj permutacija $f : [n] \to [n]$ koje imaju tačno k-fiksnih tačaka[3], izračunaj

$$1^2 p_n(1) + 2^2 p_n(2) + \cdots + k^2 p_n(k) + \cdots + n^2 p_n(n)$$

6. Koliko ima permutacija $f : [n] \to [n]$ za koje

$$|f(1) - 1| + |f(2) - 2| + \cdots + |f(n) - n|$$

   ima maksimalnu vrijednost?

7. Permutacija $a_1a_2\ldots a_{2n}$ skupa $[2n]$ je dobra ako postoje dva susjeda koji se razlikuju za tačno n, a ostale su loše. Da li ima više dobrih ili loših permutacija?

8. U jednosmjernoj ulici se nalazi parking za n automobila. Na parking sa n mjesta označenih brojevima od 1 do n, dolazi n automobila (jedan po jedan). Vozač i-tog automobila se želi parkirati na mjesto a_i. Ako je željeno mjesto slobodno, on se tu parkira, inače se parkira na prvo sljedeće slobodno mjesto sa većim brojem. Ukoliko su sva mjesta zauzeta, vozač odlazi na neki drugi parking. Koliko ima nizova želja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ za koje se sva vozila mogu parkirati?

[3]Fiksna tačka je $i \in [n]$ za koji je $f(i) = i$